# 1. Funciones de variables aleatorias

Ya en clases anteriores hemos visto que algunas variables aleatorias son resultado de operar sobre otra(s). Por ejemplo, se puede decir que si $X$ es la variable aleatoria que cuenta la cantidad de errores en un trabajo tipografico, y por cada error cobran Bs. 10, entonces la variable aleatoria $Y = 10X$ es la cantidad de dinero que se paga por los errores. Sin embargo, la distribución de probabilidades de $X$ no tiene porque ser la misma que la de $Y$. En esta sección tendremos dos métodos para calcular la distribución de la variable aleatoria $Y$.

**1.1. Método de las funciones de distribución.** Sea $U$ una función de las variables aleatorias $Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_n$

1. Localice la región $U = u$ en el espacio $(y_1, y_2, ..., y_n)$.
2. Localice la región $U \leq u$.
3. Determine $F_U(u) = P(U \leq u)$ integrando $f(y_1, y_2, ..., y_n)$ en la región $U \leq u$.
4. Determine la función de densidad $f_U(u)$ derivando $F_U(u)$.

**1.2. Método de las transformaciones.** Sea $U = h(Y)$, en donde $h(y)$ es una función creciente o decreciente de $y$ para toda $y$ tal que $f_Y(y) > 0$

1. Deduzca $y = h^{-1}(u)$.
2. Halle $\dfrac{d\left(h^{-1}(u)\right)}{du}$.
3. Determine $f_U(u) = f_Y\left(h^{-1}(u)\right)\left|\dfrac{dh^{-1}}{du}\right|$

Para ejemplificar el uso de ambos métodos hagamos algunos ejercicios.

Ejemplo. Un proceso de refinación de azúcar produce diariamente 1 tonelada de azúcar pura, aunque la verdadera cantidad de azúcar producida, $Y$ es una variable aleatoria debido a las descomposturas de la maquina y otros imprevistos. Suponga que $Y$ tiene densidad

$$f(y) = \begin{cases} 2y & , \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

La compañia tiene que las ganancias diarias son de $U = 3Y - 1$. Encuentre la densidad de probabilidad de $U$.

Solución.
(usando el método de distribución)
Para cualquier $u$

$$P(U \leq u) = P(3Y - 1 \leq u) = P\left(Y \leq \frac{u+1}{3}\right) = \int_0^{\frac{u+1}{3}} 2y dy$$
$$= y^2\Big|_0^{\frac{u+1}{3}} = \left(\frac{u+1}{3}\right)^2$$

Es claro que si $y < 0$ entonces $u < -1$ y $f_U(u) = 0$. Igualmente si $y > 1$, entonces $u > 2$ y $f_U(u) = 1$. Luego

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u \leq -1 \\ \left(\dfrac{u+1}{3}\right)^2 & , \quad -1 \leq u \leq 2 \\ 1 & , \quad u > 2 \end{cases}$$

Finalmente, derivando respecto a $u$ tenemos que:

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{2}{9}(u+1) & , \quad -1 \leq u \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

<u>Solución</u>.
(usando el método de transformaciones)

Claramente $U = 3Y - 1$ es creciente por ser una recta, por lo que $h^{-1}(u) = \dfrac{u+1}{3}$. También es fácil ver que $\left|\dfrac{dh^{-1}}{du}\right| = \dfrac{1}{3}$. Luego evaluando en la función original nos queda

$$f_U(u) = \begin{cases} 2\dfrac{u+1}{3}\dfrac{1}{3} & , \quad 0 \leq \dfrac{u+1}{3} \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{2}{9}(u+1) & , \quad -1 \leq u \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

<u>Ejemplo</u>. Volvamos al ejemplo de la gasolina que se carga a principios de semana y la que se vende durante la semana. Teníamos que la densidad conjunta era

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 3y_1 & , \quad 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

Halle $f_U(u)$ para $U = Y_1 - Y_2$, la cantidad de gasolina que queda al final de la semana. También halle su valor esperado.

<u>Solución</u>.
(usando el método de distribución)
La región de intéres será una franja que va de $y_1 - y_2 \geq u$ a $y_1 = y_2$ enmarcados en el cuadrado unitario para el espacio $(y_1, y_2)$.

Luego

$$P(Y_1 - Y_2 \leq u) = 1 - P(Y_1 - Y_2 \geq u) = 1 - \int_u^1 \int_0^{y_1 - u} 3y_1 dy_2 dy_1$$

$$= 1 - \int_u^1 3y_1(y_1 - u)dy_1 = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}u^3.$$

Como $U = Y_1 - Y_2$, y ambas variables están entre 0 y 1, entonces $u$ también varía entre esos valores para el área de integración, luego:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u \leq 0 \\ \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}u^3 & , \quad 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & , \quad u > 1 \end{cases}$$

Y derivando obtenemos:

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - u^2) & , \quad 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

<u>Solución</u>.
(método de transformaciones)

Sea $U = h(Y_2) = Y_1 - Y_2$, fijense que como ahora $U$ depende de dos variables, entonces dejamos una constante y otra variable. Claramente $h(Y_2)$ es siempre decreciente, porque es una recta con pendiente negativa para todo $y_2$. Luego $h^{-1}(u) = y_1 - u$.

Por otro lado $\left|\frac{dh^{-1}}{du}\right| = |-1| = 1$. Entonces, ahora cambiamos la variable $Y_2$ por $U$ en la función de densidad conjunta, luego:

$$g(y_1, u) = \begin{cases} f(y_1, h^{-1}(u)) \left|\frac{dh^{-1}}{du}\right| = 3y_1 & , \quad 0 \leq y_1 - u \leq y_1 \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

Ahora si $0 \leq y_1 - u \leq y_1 \Rightarrow y_1 \leq -u \leq 0 \Rightarrow 0 \leq u \leq y_1$, entonces nos queda:

$$g(y_1, u) = \begin{cases} 3y_1 & , \quad 0 \leq u \leq y_1 \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

Finalmente, como queremos es la densidad de $U$, entonces integramos sobre $y_1$ para obtener la densidad marginal.

$$f_U(u) = \int_u^1 3y_1 dy_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}u^2.$$

Eso sería para $0 \leq u \leq 1$, y 0 en cualquier otro caso.